

Вариант 7

№1

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(\eta(t), \eta(s)) &= \operatorname{cov}(\xi(t) + \xi'(t), \xi(s) + \xi'(s)) = \\ &= \operatorname{cov}(\xi(t), \xi(s)) + \operatorname{cov}(\xi(t), \xi'(s)) + \operatorname{cov}(\xi'(t), \xi(s)) + \operatorname{cov}(\xi'(t), \xi'(s)) \\ &= \cos(t-s) + \frac{\partial \cos(t-s)}{\partial s} + \frac{\partial \cos(t-s)}{\partial t} + \frac{\partial^2 \cos(t-s)}{\partial s \partial t} \\ &= \cos(t-s) + \sin(t-s) - \sin(t-s) + \cos(t-s) = 2 \cos(t-s).\end{aligned}$$

№2

$$\begin{aligned}\xi(t) &= \cos(\omega t + \phi) + \sin(\omega t + \phi) = \sqrt{2} \cos(\omega t + \phi - \pi/4) = \\ &= \sqrt{2} \cos(\omega t + \phi'),\end{aligned}$$

где ϕ' имеет равномерное распределение на $[0; 2\pi]$.

Задача сводится к задаче №2 из списка решенных задач.

№3

Применяя свойства стохаст. интегралов получаем :

$$\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2) = E\xi_1\xi_2 - E\xi_1E\xi_2 = E\xi_1\xi_2 = \int_0^1 t * t^2 dt = 1/4$$

№4

$$\phi_1 = t$$

$$\phi_2 = t^3$$

Вычисляем матрицу C , где $C_{ij} = \int_0^1 \phi_i \phi_j dt$

$$C = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/5 \\ 1/5 & 1/7 \end{pmatrix}$$

Обратная матрица имеет вид :

$$C = \begin{pmatrix} 75/4 & -105/4 \\ -105/4 & 175/4 \end{pmatrix}$$

Выпишем оценки :

$$\alpha_1 = \int_0^1 \left(\frac{75}{4} \phi_1 - \frac{105}{4} \phi_2 \right) d\xi(t)$$

$$\alpha_2 = \int_0^1 \left(-\frac{105}{4} \phi_1 + \frac{175}{4} \phi_2 \right) d\xi(t)$$

№5

Общее решение можно записать в виде :

$$\xi(t) = W(t, 0)\xi(0) + \int_0^t W(t, s)d\eta(s),$$

где

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}W(t, s) = \frac{1}{1+t^2}W(t, s), t > s \\ W(s, s) = 1. \end{cases}$$

Решая, получаем :

$$W(t, s) = \exp(\operatorname{arctg}(t) - \operatorname{arctg}(s))$$

Теперь можно выписать ответ :

$$\xi(t) = \exp(\operatorname{arctg}(t))\xi_0 + \int_0^t \exp(\operatorname{arctg}(t) - \operatorname{arctg}(s))d\eta(s),$$

№6

Выпишем матрицу вероятностей перехода :

$$\pi = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.1 & 0.9 \end{pmatrix}$$

$$\text{а) } \pi^2 = \begin{pmatrix} 0.52 & 0.48 \\ 0.16 & 0.84 \end{pmatrix}$$

$$p_1^3 = 0.5 * 0.48 + 0.5 * 0.84 = 0.66$$

б) Вероятности стабилизировались, значит :

$$\begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.1 & 0.9 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$$

Решая, получаем :

$$p = \begin{pmatrix} 0.25 & 0.75 \\ 0.25 & 0.75 \end{pmatrix}$$